

# $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung und Pauli-Prinzip

Von HANS W. WITTERN

Florida State University, Tallahassee, Florida \*

(Z. Naturforsch. **18 a**, 1254—1265 [1963]; eingegangen am 1. Oktober 1963)

Unter Berücksichtigung des PAULI-Prinzips und einiger allgemeiner Eigenschaften des 8-Teilchen-Problems wird eine näherungsweise gültige Reduktion auf ein Zwei-Teilchen-Problem vorgenommen und ein Potential hergeleitet, das wenigstens für niedrige Energien die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung richtig beschreibt.

Streuexperimente mit  $\alpha$ -Teilchen an Heliumatomen, deren Kerne ebenfalls  $\alpha$ -Teilchen sind, wurden bereits in den Jahren um 1930 ausgeführt<sup>1–5</sup>. Damals galt es, die Frage zu beantworten, ob die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung durch die berühmte RUTHERFORDsche Streuformel oder durch die MOTT-Formel beschrieben wird. In der von MOTT<sup>6</sup> abgeleiteten Streuformel wird die Tatsache berücksichtigt, daß die  $\alpha$ -Teilchen der BOSE-Statistik folgen.

Die ersten deutlichen Abweichungen vom reinen COULOMBSchen Potential wurden 1931 beobachtet<sup>7</sup>. Als Quellen für die  $\alpha$ -Teilchen standen damals nur natürliche  $\alpha$ -Strahler zur Verfügung. Infolgedessen waren die Streuexperimente noch sehr ungenau und damit auch die daraus abgeleiteten Streuphasen und phänomenologischen Potentiale<sup>7, 8</sup>. Auch der Zusammenhang mit dem Compoundkern zweier  $\alpha$ -Teilchen, dem Be<sup>8</sup>, wurde damals schon betrachtet, um Aussagen über dessen angeregte Niveaus zu gewinnen, die dann mit den Aussagen aus anderen Kernreaktionen verglichen wurden<sup>9</sup>.

Im Laufe der Zeit, insbesondere seit der Inbetriebnahme der Teilchenbeschleuniger, sind genauere Experimente durchgeführt worden. Die neuesten Messungen wurden durchgeführt für folgende, im Schwerpunktsystem der beiden  $\alpha$ -Teilchen gemessenen Energiebereiche der  $\alpha$ -Teilchen:

| Energie-Bereich<br>in MeV | Referenz für<br>Streuexperiment | Phasenanalyse |
|---------------------------|---------------------------------|---------------|
| bis 1,5                   | 10                              | 10            |
| 1,5 bis 3,0               | 11                              | 11            |
| 6,0 bis 11,5              | 12                              | 13            |

Außerdem liegen noch einzelne Messungen vor<sup>14, 15</sup> bei 15 und 19,3 MeV, zu denen noch keine genauen Phasenverschiebungen ermittelt wurden. Die neueren Streudaten weichen z. Tl. erheblich von älteren Messungen ab<sup>12, 16</sup>.

Im  $\alpha$ -Teilchenmodell<sup>17</sup>, in dem  $\alpha$ -Teilchen oder wenigstens „ $\alpha$ -Cluster“ als Bestandteile der Atomkerne angesehen werden, spielt die Wechselwirkung zwischen zwei  $\alpha$ -Teilchen eine fundamentale Rolle. Die „phänomenologische“ Potentialfunktion dieser Wechselwirkung wird darin so bestimmt, daß die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streudaten richtig herauskommen<sup>17–19</sup>. Die Diskussion der neuen Streuexperimente<sup>13</sup> auf Grund des HAEFERNerschen Modellpotentials<sup>17</sup>, auf das wir im folgenden noch zurückkommen werden, liefert qualitativ einigermaßen befriedigende Resultate, doch läßt die quantitative Seite noch erheblich zu wünschen übrig.

Betrachtet man die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung als reines Zwei-Teilchen-Problem, so kann man nach JOST und KOHN<sup>20</sup> aus der Energieabhängigkeit der Streuphasen  $\delta_L(E)$  das zugehörige Wechselwirkungs-

\* This work was partly supported by the U.S. Office of Naval Research.

<sup>1</sup> E. RUTHERFORD u. J. CHADWICK, Phil. Mag. **4**, 605 [1927].

<sup>2</sup> J. CHADWICK, Proc. Roy. Soc., Lond. A **128**, 114 [1930].

<sup>3</sup> P. WRIGHT, Proc. Roy. Soc., Lond. A **137**, 677 [1932].

<sup>4</sup> B. O. MOHR u. G. E. PRINGLE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **160**, 190 [1937].

<sup>5</sup> S. DEVONS, Proc. Roy. Soc., Lond. A **172**, 559 [1939].

<sup>6</sup> N. V. MOTT, Proc. Roy. Soc., Lond. A **126**, 259 [1930].

<sup>7</sup> H. M. TAYLOR, Proc. Roy. Soc., Lond. A **134**, 103 [1932]; A **136**, 605 [1932].

<sup>8</sup> H. MARGENAU, Phys. Rev. **59**, 37 [1941].

<sup>9</sup> J. A. WHEELER, Phys. Rev. **59**, 16, 27 [1941].

<sup>10</sup> N. P. HEYDENBURG u. G. M. TEMMER, Phys. Rev. **104**, 123 [1956].

<sup>11</sup> C. W. REICH, J. L. RUSSELL u. G. C. PHILLIPS, Phys. Rev. **104**, 135 [1956].

<sup>12</sup> R. NILSON, R. O. KERNAN, G. R. BRIGGS u. W. JENTSCHKE, Phys. Rev. **104**, 1673 [1956].

<sup>13</sup> R. NILSON, W. K. JENTSCHKE, G. R. BRIGGS, R. O. KERNAN u. J. N. SNYDER, Phys. Rev. **109**, 850 [1958].

<sup>14</sup> E. GRAVES, Phys. Rev. **84**, 1250 [1951].

<sup>15</sup> W. E. BURCHAM, W. M. GIBSON, D. J. PROWSE u. J. ROTBLAT, Nucl. Phys. **3**, 217 [1957].

<sup>16</sup> F. E. STEIGERT u. M. B. SAMPSON, Phys. Rev. **92**, 660 [1953].

<sup>17</sup> R. H. HAEFNER, Rev. Mod. Phys. **23**, 228 [1951].

<sup>18</sup> C. H. HUMPHREY, Bull. Amer. Phys. Soc. II **2**, 72 [1957].

<sup>19</sup> E. V. D. SPUY u. H. J. PIENNAAR, Nucl. Phys. **7**, 397 [1958].

<sup>20</sup> R. JOST u. W. KOHN, Phys. Rev. **87**, 977 [1952].



potential für die verschiedenen Drehimpulse  $L$  im wesentlichen eindeutig konstruieren. Voraussetzung ist die Kenntnis der Streuphasen für *alle* Energien. In praxi kann das Potential auf diesem Wege nicht bestimmt werden, da das experimentelle Material nicht ausreicht, die asymptotische Form der Energieabhängigkeit der Streuphasen zu erkennen.

Abgesehen davon ist die Anwendbarkeit dieser Methode auf die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung auch noch dadurch in Frage gestellt, daß bei Energien von mehr als 20 MeV (im Schwerpunktsystem) neben der elastischen Streuung Kernreaktionen auftreten können, also kein reines Zwei-Teilchen-Problem mehr vorliegt.

Will man dagegen nur die Streuphasen eines gewissen Energieintervalls wiedergeben, so gibt es dafür zahlreiche Potentiale: Man braucht nur  $\delta_L(E)$  außerhalb des betrachteten Intervalls beliebig fortzusetzen und dann die Methode von JOST und KOHN anzuwenden. Unter den zahlreichen phänomenologischen Potentialen, die sich so gewinnen lassen, wird es vielleicht auch solche geben, die nicht vom Drehimpuls abhängen, d. h. simultan die Streuphasen für  $L=0, 2, 4, \dots$  wiedergeben. Damit läßt sich dann die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung als gewöhnliches Zwei-Teilchen-Problem (mit lokalem Potential) behandeln.

Ein phänomenologisches Potential für die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung, sei es nun drehimpulsabhängig oder nicht, bedeutet letztlich nichts anderes als eine kompakte Darstellung der experimentellen Daten. Es erhebt sich dann die Frage, ob man dieses Potential aus allgemeineren Prinzipien der Kernphysik ableiten kann, also etwa aus der SCHRÖDINGER-Gleichung für das 8-Nukleonen-Problem und den Kräften zwischen den einzelnen Nukleonen, insbesondere den aus den Zwei-Nukleonen-Streuexperimenten gewonnenen Zwei-Körper-Kräften. Einer praktischen Durchführung dieses Programms stehen neben den mathematischen Schwierigkeiten in der Bewältigung des 8-Teilchen-Problems die Mängel in der Kenntnis der Kernkräfte entgegen. Die eigentliche Schwierigkeit ist die: Die beste Darstellung der Zwei-Nukleonen-Streudaten, die auch die Sättigungsbedingungen erfüllt, erfordert hardcore-Potentiale. Angenäherte Lösungen für das Viel-Teilchen-Problem konnten dagegen bisher nur gewonnen werden für monotone Zwei-Körper-Kräfte. Der Ausweg aus diesem Di-

lemma ist, diese Kräfte als „effektive“ Zwei-Körper-Kräfte anzusehen, die weitgehend den wirklichen Zwei-Körper-Kräften äquivalent sind, aber keine hardcores enthalten. Ihre Berechnung kann etwa nach der BRÜCKNERSCHEN Theorie erfolgen. Für die Praxis genügt statt dessen häufig folgendes Verfahren<sup>21</sup>: Man konstruiert ein monotones Potential, das die Zwei-Nukleonen-Streudaten bis etwa 60 MeV wiedergibt und erzwingt die Sättigung durch geeignete Wahl von Konstanten in den Wellenfunktionen, so daß ein „Zusammenrutschen“ des Kerns unmöglich ist. Die Behandlung des 8-Nukleonen-Problems auf Grund dieser Annahmen führte zu guten Resultaten<sup>21–26</sup>. Wie man auch immer die Gültigkeit der Annahmen beurteilen mag, eine wichtige Verbesserung gegenüber dem älteren  $\alpha$ -Teilchen-Modell<sup>17</sup> ist darin zu sehen, daß dem PAULI-Prinzip Genüge geleistet wird.

Daß das PAULI-Prinzip einen ungeheuren Einfluß in niederenergetischen Kernreaktionen hat, geht bereits daraus hervor, daß Zustände, die aus dem Anfangszustand nur durch Permutation der Teilchen (Rearrangement) hervorgehen, keinen neuen, unabhängigen Zustand des Systems liefern. Bedenkt man noch, daß die Nukleonen im  $\alpha$ -Teilchen relativ fest gebunden sind, daß also eine Polarisation des  $\alpha$ -Teilchens während des Streuprozesses außer Betracht bleiben kann, so sollte es möglich sein, unter Berücksichtigung des PAULI-Prinzips und einiger allgemeiner Eigenschaften des 8-Teilchen-Problems näherungsweise eine Reduktion auf ein Zwei-Teilchen-Problem vorzunehmen und ein Potential herzuleiten, das wenigstens für niedrige Energien die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung quantitativ richtig beschreibt. Die Betrachtung kann als Beispiel dafür dienen, wie man ein Wechselwirkungspotential gewinnen kann in Fällen, in denen – z. B. bei schweren Compoundkernen – die Integrodifferentialgleichung für das Streuproblem<sup>24, 26</sup> zu kompliziert ist, um eine Auswertung zu ermöglichen.

Im folgenden wird nun gezeigt, daß eine solche Reduktion tatsächlich möglich ist. Der einzige Parameter, von dem die Streudaten in dieser modellmäßigen Behandlung noch abhängen, ist der Kernradius des  $\alpha$ -Teilchens, und mit vernünftigen Werten für diesen kann man eine ausgezeichnete Überein-

<sup>21</sup> K. WILDERMUTH u. TH. KANELLOPOULOS, Nucl. Phys. **7**, 150 [1958]; **9**, 449 [1959].

<sup>22</sup> S. F. EDWARDS, Proc. Cambr. Phil. Soc. **48**, 652 [1952].

<sup>23</sup> S. J. BIEL, Proc. Phys. Soc., Lond. A **70**, 866 [1957].

<sup>24</sup> A. HERZENBERG, Nucl. Phys. **3**, 1 [1957]. — A. HERZENBERG u. A. S. ROBERTS, Nucl. Phys. **3**, 314 [1957].

<sup>25</sup> E. V. D. SPUY, Nucl. Phys. **11**, 615 [1959].

<sup>26</sup> E. W. SCHMID u. K. WILDERMUTH, Nucl. Phys. **26**, 463 [1961].

stimmung der berechneten mit den experimentellen Streudaten erzielen. In Abschnitt 1 stellen wir das Modellpotential auf und geben das Ergebnis der Streurechnung an. Einer Diskussion der dem Modellpotential zugrunde liegenden Annahmen ist Abschnitt 2 gewidmet. Mit einer Diskussion der Ergebnisse in Abschnitt 3 schließen wir unsere Betrachtungen.

### 1. Modellpotential und Streurechnung

Den Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen bildet die SCHRÖDINGER-Gleichung für die Relativ-Bewegung zweier  $\alpha$ -Teilchen:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right\} F(r) = E \cdot F(r). \quad (1)$$

Darin ist  $m$  die reduzierte Masse

$$m = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2} = 2M \quad (2)$$

und  $M$  die mittlere Nukleonenmasse. Das Potential  $V$  mag neben  $r$  noch von weiteren Parametern abhängen, z. B. dem Drehimpuls, wie wir in Abschnitt 2 sehen werden.

In (1) kennen wir – streng genommen – weder  $V(r)$  noch  $F(r)$ , doch sind einige allgemeine Eigenschaften von  $V$  und  $F$  bekannt. Wir formulieren diese der Reihe nach als Annahme und leiten dann die den numerischen Rechnungen zugrunde liegende Form des Modellpotentials ab. Auf eine Begründung der Annahmen – soweit sie nicht unmittelbar einleuchtend sind – kommen wir in Abschnitt 2 zurück.

Wir benutzen zuerst die Tatsache, daß die Kernkräfte eine kurze Reichweite haben. Für Abstände der beiden  $\alpha$ -Teilchen, die größer als  $a$  sind, wobei  $a$  ungefähr gleich dem Durchmesser des  $\alpha$ -Teilchens ist (etwa 3–4 fm), können wir  $V(r)$  als reines COULOMB-Potential ansetzen. Für niedrige Streuenergien – bis zu den von uns betrachteten Energien von 12 MeV im Schwerpunktsystem der Streupartner – ist die DE-BROGLIE-Wellenlänge noch merklich größer als der Durchmesser der Streupartner. Daher kommt es in Intervallen, die kleiner als 1 fm ( $= 10^{-13}$  cm) sind, auf Einzelheiten des Potentialverlaufs nicht an, und wir können für den attraktiven Teil der nuklearen Wechselwirkung ein Kastenpotential annehmen. Für den inneren Bereich machen wir keine besonderen Annahmen über den Verlauf des elektrostatischen Potentials, sondern denken uns diese Wechselwirkung vielmehr in dem Potential der Kernkräfte enthalten.

Wir müssen nun noch dem PAULI-Prinzip Rechnung tragen. Im primitiven  $\alpha$ -Teilchen-Modell geschieht dies durch das repulsive Zusatzglied im HAEFNERschen Modellpotential

$$U_{\text{Rep}} = \frac{q^2 \hbar^2}{2m r^2}, \quad q^2 = 30. \quad (3)$$

Dieses Zusatz-Potential bringt die im PAULI-Prinzip liegende Abstoßungstendenz qualitativ zum Ausdruck, doch wird man damit rechnen müssen, daß das Zusatzpotential geschwindigkeits- und drehimpulsabhängig ist (vgl. Abschnitt 2).

Wir wollen das PAULI-Prinzip durch seine Wirkung auf die Wellenfunktion berücksichtigen. Wie wir in Abschnitt 2 begründen werden, erlaubt die Wellenfunktion für kleine Abstände der Streupartner die Entwicklung

$$F(r) = (c_0 r^4 + c_1 r^6 + \dots) Y_L(\vartheta, \varphi), \quad r \triangleq (r, \vartheta, \varphi). \quad (4)$$

Über diese allgemeine Aussage hinaus werden wir im folgenden auch die Schalenmodellwellenfunktionen für die virtuellen Zustände des  $\text{Be}^8$ , des Compoundkerns zweier  $\alpha$ -Teilchen, heranziehen:

$$F_L = \text{const} \cdot r^4 \cdot \exp\{-q r^2\} Y_L(\vartheta, \varphi), \quad L = 0, 2, 4 \quad (5)$$

sowie die Anregungsenergien dieser Zustände (vgl. Abschnitt 2 und Abb. 1)

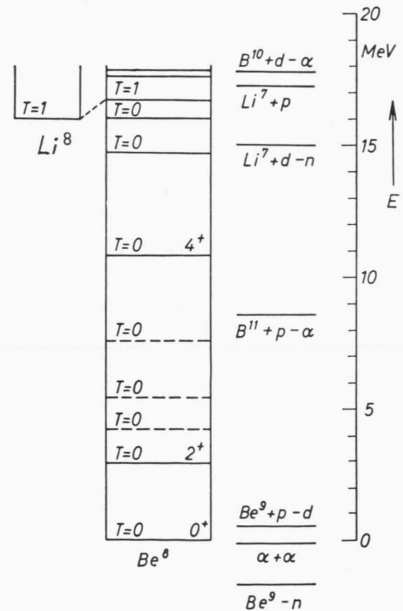


Abb. 1. Niveauschema des Kerns  $\text{Be}^8$  nach <sup>31</sup>.

$$\begin{aligned} E_0 &= 0,096 \text{ MeV} & \text{für } L=0, \\ E_2 &= 2,996 \text{ MeV} & \text{für } L=2, \\ E_4 &= 10,6 \text{ MeV} & \text{für } L=4. \end{aligned} \quad (6)$$

Zur Bestimmung des Modellpotentials für  $r < a$  gehen wir von folgender Frage aus: Wie muß das Potential aussehen, für das die Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung (1) für die Energien (6) der Compoundniveaus die Form (5) haben<sup>27</sup>? Wir tragen (5) in (1) ein und erhalten für  $u_L$  gemäß

$$F_L(r) = \frac{u_L(r)}{r} Y_L(\vartheta, \varphi) \quad (7)$$

die Differentialgleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{4M} u_L'' + \left( \frac{\hbar^2}{4M} \cdot \frac{L(L+1)}{r^2} + V - E_L \right) u_L = 0. \quad (8)$$

Mit den Potenzreihenentwicklungen für  $u_L$  und  $V$ :

$$\begin{aligned} u_L &= \text{const} \cdot r^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-q r^2)^n \\ &= \text{const} \cdot r^5 \cdot \exp\{-q r^2\}, \\ V_L &= \frac{\hbar^2}{4M} r^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n} \end{aligned} \quad (9)$$

erhalten wir durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} k &= -2, \\ a_0 &= L(L+1) - 20, \\ a_1 &= \frac{4M E_L}{\hbar^2} - 22q, \\ a_2 &= 4q^2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Brechen wir die Reihen nach diesem Gliede ab, so folgt für  $V(r)$ :

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{4M} \frac{20-L(L+1)}{r^2} + U_L(r) \quad (11)$$

mit  $U_0 = E_0 - \frac{11q\hbar^2}{2M} + q^2 \frac{\hbar^2}{M} r^2 + \dots$ ,  $L=0$ ,

$$U_L = U_0 + (E_L - E_0), \quad L=2, 4.$$

Das erste Glied in (11) beschreibt die Wirkung des PAULI-Prinzips, es ist ähnlich aufgebaut wie (3), während  $U(r)$  im wesentlichen die Kräfte zwischen den einzelnen Nukleonen enthält. Da die Differenz der  $U_L$  durch die Energie-Differenzen der quasi-stationären Zustände festgelegt ist, brauchen wir nur noch  $U_0(r)$  zu bestimmen. Wie wir bereits erwähnten, stellt ein Kastenpotential eine ausreichende Näherung dar, und die Potentialtopftiefe muß zu gegebener Reichweite  $a$  so bestimmt werden, daß ein virtueller Zustand bei  $E_0 = 0,096$  MeV liegt.

Infolge der breiten COULOMB-Barriere und der geringen Energie des virtuellen Zustandes hat dieser

eine sehr geringe Energiebreite, und alle Definitionen des „virtuellen Zustandes“ liefern im Rahmen der Rechengenauigkeit dasselbe Ergebnis. Wir bestimmen die Wellenfunktion für diesen Zustand dadurch, daß wir für  $E = E_0$  die Randbedingung

$$u_0(c) = 0 \quad \text{für ein bestimmtes } c \gg a \quad (12)$$

fordern. Eine gute Wahl für  $c$  ist  $c = 57,6$  fm, denn für diesen Wert ist das COULOMB-Potential noch größer als  $E_0$ , so daß die Wellenfunktion im äußeren Bereich monoton abfällt, wie man es von den stationären Zuständen her kennt. Aus der Randbedingung (12) folgt für die logarithmische Ableitung am Kernrand:

| $a$    | $D_0 = a \cdot u_0'(a)/u_0(a)$ |
|--------|--------------------------------|
| 3,5 fm | -1,236                         |
| 4,0    | -1,239                         |
| 4,2    | -1,240                         |
| 4,5    | -1,241                         |
| 4,8    | -1,242                         |

(13)

Man kann also in guter Näherung  $D_0 = -1,240$  setzen, unabhängig vom speziellen Wert von  $a$ .

Die Potentialtopftiefe  $U_0$  in

$$\begin{aligned} U_0(r) &= -U_0 & \text{für } r < a \\ &= 0 & \text{sonst} \end{aligned} \quad (14)$$

ist bestimmt durch die Bedingung, daß die logarithmische Ableitung der Wellenfunktion des inneren Bereiches ebenfalls den Zahlenwert  $D_i = -1,240$  hat. Der Zusammenhang zwischen  $D_i$ ,  $a$  und  $U_0$  ist in Abb. 2 dargestellt. Uns interessiert hauptsächlich die Kurve c, die zum Wert  $D_i = -1,240$  gehört.

Als endgültige Form unseres Modellpotentials erhalten wir daher:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{4Mr^2} (20 - L[L+1]) + U_L & \text{für } r \leq a \\ \frac{4e^2}{r} & \text{für } r > a \end{cases} \quad (15)$$

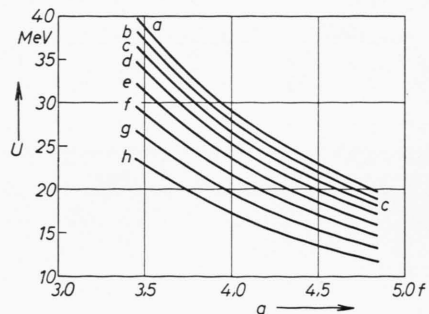


Abb. 2. Potentialtopftiefe  $U_0 = -U(a, D_0)$  für  $D_0 = -2,48$  (Kurve a),  $-1,86$  (b),  $-1,24$  (c),  $-0,62$  (d),  $0,00$  (e),  $+0,62$  (f),  $+1,24$  (g),  $+1,86$  (h).

<sup>27</sup> T. H. R. SKYRME u. J. K. PERRING, Proc. Phys. Soc., Lond. A **69**, 600 [1956].



mit  $U_L(r) = -U(a, D_i) + e_2 \cdot \delta_{2L} + e_4 \cdot \delta_{4L}$ ,  
 $e_2 = 2,9 \text{ MeV}$ ,  $e_4 = 10,5 \text{ MeV}$ .

Als freier Parameter kommt nur die Reichweite  $a$  vor, die die Streuphasen empfindlich beeinflusst. Die Frage ist nun, kann die Reichweite  $a$  so bestimmt werden, daß simultan die Streuphasen für  $L=0, 2, 4$  für Streuenergien zwischen 0 und 12 MeV im baryzentrischen System quantitativ beschrieben werden. Die Antwort fällt positiv aus, wie die Streurechnung zeigt, die für die in (13) angegebenen Werte von  $a$  durchgeführt wurde. Nur für

$$a = 3,5 \text{ fm} \quad (16)$$

ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen Streuphasen. Auf die praktische Durchführung der Streurechnung wollen wir hier nicht näher eingehen. Die numerischen Rechnungen wurden unter Zuhilfenahme der Tafeln der COULOMB-Funktionen<sup>28</sup> mit einer Tischrechenmaschine durchgeführt. Das Ergebnis der Streurechnung für  $a = 3,5 \text{ fm}$  ist in den Abb. 3–5 dargestellt.

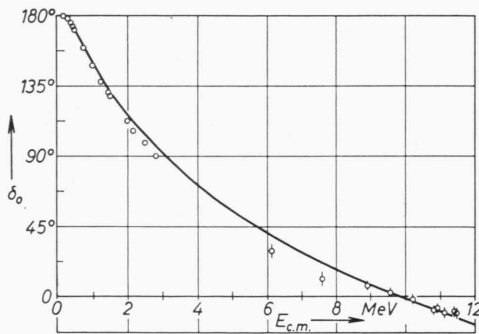


Abb. 3. Nach dem Modellpotential berechnete Streuphasen für  $a = 3,5 \text{ fm}$  und  $L=0$ . Die Kreise sind experimentelle Daten nach <sup>13</sup>.

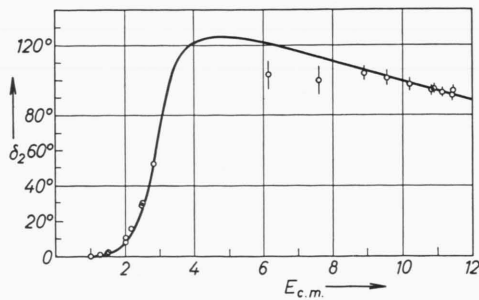


Abb. 4. Nach dem Modellpotential berechnete Streuphasen für  $a = 3,5 \text{ fm}$  und  $L=2$ . Die Kreise sind experimentelle Daten nach <sup>13</sup>.

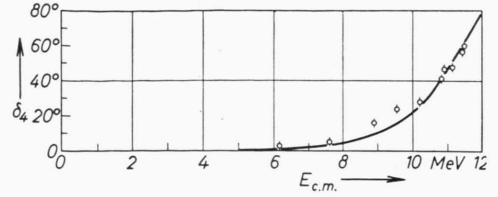


Abb. 5. Nach dem Modellpotential berechnete Streuphasen für  $a = 3,5 \text{ fm}$  und  $L=4$ . Die Kreise sind experimentelle Daten nach <sup>13</sup>.

## 2. Detailliertere Diskussion der in Abschnitt 1 gemachten Annahmen

In diesem Abschnitt wollen wir drei Fragen genauer behandeln, die in Abschnitt 1 zurückgestellt wurden:

Die Reduktion des 8-Teilchen-Problems auf die Zwei-Teilchen-SCHRÖDINGER-Gleichung (1),  
 die Verifikation des Ansatzes (4),  
 die Berechnung der Compoundniveaus nach dem Schalenmodell.

### 2.1 Reduktion des 8-Teilchen-Problems

Das  $\alpha$ -Teilchen besteht aus 4 Nukleonen, je 2 Protonen und 2 Neutronen. Die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung ist also ein 8-Teilchen-Problem, dessen SCHRÖDINGER-Gleichung durch

$$H^{(N)} \cdot \psi(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N) = E^{(N)} \cdot \psi(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N) \quad (17)$$

mit 
$$H^{(N)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^N \Delta_i + V(\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N)$$

und  $N=8$  gegeben ist. In  $\bar{r}_i$  sind die Orts- $(r)$ , Spin- $(s)$  und Ladungskoodinaten  $(t)$  zusammengefaßt. Die Zustände des 8-Teilchen-Systems werden beschrieben durch totalantisymmetrische Lösungen der Gl. (17). Der Compoundkern zweier  $\alpha$ -Teilchen,  $\text{Be}^8$ , ist nicht stabil. (17) hat daher keine Lösungen, die gebundenen Zuständen von 4 Protonen und 4 Neutronen entsprechen. Die elastische  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung wird durch Lösungen von (17) beschrieben, die asymptotisch die Form haben:

$$\Psi \cong A \{ F_{ab} (\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2) \varphi_a(r_1 \dots r_4) \varphi_b(r_5 \dots r_8) \} \quad \text{für } |\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2| \rightarrow \infty \quad (18)$$

mit 
$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{4} (r_1 + r_2 + r_3 + r_4),$$
  

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{1}{4} (r_5 + r_6 + r_7 + r_8),$$
  

$$A = \sum_{i=1}^{8!} (\text{sgn } P_i) \cdot P_i.$$

<sup>28</sup> I. BLOCH, M. HULL, A. A. BROYLES, W. G. BOURICIUS, B. E. FREEMAN u. G. BREIT, Rev. Mod. Phys. **23**, 147 [1951].

$A$  ist der Antisymmetrisierungsoperator für 8 Teilchen, in dem die  $P_i$  alle Permutationen von 8 Dingen durchlaufen. Die  $\varphi_j$  beschreiben die Zustände des  $\alpha$ -Teilchens, sind also totalantisymmetrische Lösungen der Gl. (17) für  $N=4$ .

Wir wollen nun annehmen, daß die  $\alpha$ -Teilchen vor der Streuung und, da wir nur elastische Streuprozesse betrachten, auch nach der Streuung im Grundzustand vorliegen. Die Energie der Relativbewegung ist dann durch

$$E = E^{(8)} - 2E^{(4)} \quad (19)$$

gegeben. Da es angeregte Zustände des  $\alpha$ -Teilchens nicht gibt<sup>29</sup> und eine Spaltung des  $\alpha$ -Teilchens erst bei  $E=19,81$  MeV, der Energieschwelle für den Prozeß  $\text{He}^4 \rightarrow \text{H}^3 + \text{H}^1$  einsetzt, können für kleinere Energien (im baryzentrischen System) nur elastische Streuprozesse vorkommen. Die Wellenfunktion des Grundzustandes des  $\alpha$ -Teilchens ist nur in einem endlichen Bereich wesentlich von Null verschieden, und es ist bequem, ein  $L_0$  einzuführen, so daß

$$\varphi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_4) \approx 0 \quad \text{für} \quad \left| \mathbf{r}_i - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \mathbf{r}_j \right| > L_0. \quad (20)$$

Das so definierte  $L_0$  ist ein wenig größer als der Radius des  $\alpha$ -Teilchens. Führen wir noch Polarkoordinaten  $R, \vartheta, \varphi$  für  $\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2$  ein, so können wir für  $\Psi$  schreiben:

$$\begin{aligned} \Psi &= A \{ \mathfrak{F} \} \\ &= A \{ F(R, \vartheta, \varphi) \varphi_0(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_4) \cdot \varphi_0(\mathbf{r}_5 \dots \mathbf{r}_8) \} \\ &\quad \text{für } R > 2L_0 \\ \text{und } F(R, \vartheta, \varphi) &= e^{i\mathfrak{R}\mathfrak{R}} + f(\vartheta) \frac{1}{R} \exp\{i|\mathfrak{R}|\mathfrak{R}\} \\ &\quad \text{für } R \gg L_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Wir wollen nun erläutern, wie die Wellenfunktion für kleine Relativabstände gewonnen werden kann und folgen dabei weitgehend Arbeiten von HERZENBERG<sup>24</sup> und v. D. SPUY<sup>25</sup>.

Das  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuproblem hat eine gewisse Ähnlichkeit mit atomaren Streuprozessen, die darin begründet ist, daß in beiden Fällen die Streupartner neben der Relativbewegung auch eine innere Bewegung ausführen, die quantenmechanisch beschrieben werden muß. Neben den Unterschieden in der Größe der Streupartner und ihren Massen ist vor allem folgendes zu beachten: Innerhalb der  $\alpha$ -Teilchen ist nichts vorhanden, was in gleicher Weise ausgezeichnet ist wie der Atomkern im Atom.

Solange die beiden  $\alpha$ -Teilchen getrennt sind, kann der Schwerpunkt der  $\alpha$ -Teilchen die Rolle des Atomkerns im Atom übernehmen. Aber auch dann besteht noch ein Unterschied. Während die Antisymmetrisierung der Elektronen ohne weiteres in den Koordinaten der inneren Bewegung durchgeführt werden kann, ist dies für die Nukleonen des  $\alpha$ -Teilchens nicht mehr der Fall, da die Teilchenkoordinaten nicht mehr voneinander unabhängig sind. Sobald jedoch die beiden  $\alpha$ -Teilchen ein Compoundsystem bilden, läßt sich nichts mehr angeben, was die Rolle der Atomkerne übernehmen kann. Infolge der Gleichheit der Teilchen hat der Begriff eines Schwerpunktes von 4 Teilchen überhaupt keinen Sinn mehr.

Lassen wir dagegen zunächst die Gleichheit der Teilchen unberücksichtigt, so können wir nach Einführung der Schwerpunkte der Teilchen 1...4 und 5...8 eine formale Näherungslösung nach der adiabatischen Methode gewinnen. Mit den Abkürzungen in (18) und

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{1}{2} (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2), \quad \mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2), \\ Q_1 &= \mathbf{r}_1 - \frac{1}{3} (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4), \quad Q_4 = \mathbf{r}_5 - \frac{1}{3} (\mathbf{r}_6 + \mathbf{r}_7 + \mathbf{r}_8), \\ Q_2 &= \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4), \quad Q_5 = \mathbf{r}_6 - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_7 + \mathbf{r}_8), \\ Q_3 &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4, \quad Q_6 = \mathbf{r}_7 - \mathbf{r}_8 \\ \text{und } T_1 &= -\frac{\hbar^2}{M} \left( \frac{2}{3} \Delta Q_1 + \frac{3}{4} \Delta Q_2 + \Delta Q_3 \right), \\ T_2 &= -\frac{\hbar^2}{M} \left( \frac{2}{3} \Delta Q_4 + \frac{3}{4} \Delta Q_5 + \Delta Q_6 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

erhalten wir nach Weglassen der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung den HAMILTON-Operator  $H^{(8)}$ :

$$H^{(8)} = -\frac{\hbar^2}{4M} + T_1 + T_2 + V(\mathfrak{R}, Q_1 \dots Q_6, s_1, \dots, t_8). \quad (23)$$

Die „adiabatische Methode“ besteht nun darin, daß zunächst die Gleichung für die „innere Bewegung“ gelöst wird:

$$\{T_1 + T_2 + V(\mathfrak{R} \dots t_8)\} \chi_j = U_j(\mathfrak{R}) \chi_j, \quad (24)$$

in der  $\mathfrak{R}$  als Parameter auftritt. Mit  $U_j(\mathfrak{R})$  als Potential gewinnt man die Relativ-Bewegung aus:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{4M} + U_j(\mathfrak{R}) \right\} F_j(\mathfrak{R}) = E F_j(\mathfrak{R}). \quad (25)$$

Die Produktfunktion

$$\Psi = F_j(\mathfrak{R}) \cdot \chi_j(\mathfrak{R} \dots t_8) \quad (26)$$

stellt dann bis zu einer Energie von etwa 4 MeV in der Relativbewegung eine gute Näherungslösung von (17) dar<sup>24</sup>.

<sup>29</sup> R. M. EISENBERG, Phys. Rev. **102**, 1104 [1956].

Berücksichtigen wir nun die Gleichheit der Teilchen, so erkennen wir, daß (26) sicher *keine* gute Näherung für das  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuprobblem darstellt, wenn ein Nukleonenaustausch zwischen den  $\alpha$ -Teilchen wichtig ist. Wir müssen dann totalantisymmetrische Wellenfunktionen betrachten.

Die Gl. (17) ist symmetrisch in den 8 Teilchen, ihre Lösungen haben also definierten Symmetriecharakter, ferner bilden die Lösungen von (24) ein vollständiges Funktionensystem bezüglich der inneren Koordinaten. Daher gibt es für jede, insbesondere also für jede total antisymmetrische, strenge Lösung von (17) die Entwicklung:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\mathfrak{R}) \cdot \chi_i(\mathfrak{R}, q_1 \dots t_8). \quad (27)$$

Diese naheliegende Verallgemeinerung des Ansatzes (26) stellt auch bei Abbrechen der Reihe ein systematisches Näherungsverfahren dar, hat aber folgende Nachteile: Der Symmetriecharakter der Funktionen läßt sich an der unendlichen Reihe nur schwer erkennen. Eine Entscheidung, ob wir eine zulässige Funktion vor uns haben oder nicht, fällt also schwer. Bei Beschränkung auf endlich viele Summenglieder geht ferner im allgemeinen die Antisymmetrie verloren. Der Nukleon-Austausch wird dann nicht richtig beschrieben. Eine andere Verallgemeinerung der Näherungslösung besteht in der Antisymmetrisierung von (26)

$$\Psi = A\{F_j(\mathfrak{R}) \cdot \chi_j(\mathfrak{R}, q_1 \dots t_8)\}. \quad (28)$$

Hier erkennt man sofort den Symmetriecharakter. Dagegen läßt sich schwer abschätzen, unter welchen Bedingungen (28) eine gute Näherung darstellt.

Im allgemeinen wird man die Gl. (24) für  $\chi_j$  nicht exakt lösen können und daher einen plausiblen Ansatz für eine Näherungslösung machen. Dann ist es besser,  $F_j$  nicht aus (25) zu gewinnen, sondern so zu bestimmen, daß der Ausdruck

$$\int \Psi^* (H^{(8)} - E) \Psi \, d\tau \quad (29)$$

gegenüber Variationen von  $F_j$  stationär ist (RAYLEIGH-SCHRÖDINGERSCHES Variationsprinzip). Für  $F_j$  ergibt sich dann eine Integro-Differentialgleichung von folgender Art:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{4M} \Delta_{\mathfrak{R}} + V_d\right) F + \int \chi^* V_x(\mathfrak{R}, q_1 \dots t_8) \chi \cdot F(\xi) \, d\tau = E \cdot F(\mathfrak{R}). \quad (30)$$

Darin ist  $V_d$  eine gewöhnliche Potentialfunktion (Direktterm),  $V_x$  eine Summe von Austauschtermen

und  $\xi$  eine Linearkombination von  $\mathfrak{R}, q_1 \dots q_6$ . Die Weiterbehandlung dieser Gleichung erfolgt nun für spezielle Annahmen über die effektiven Zweikörperkräfte und die Wellenfunktion für die innere Bewegung<sup>25, 26</sup>. Wir wollen darauf verzichten, alle Umformungen im einzelnen vorzuführen, und beschränken uns auf einige Bemerkungen zum Ergebnis.

Da das  $\alpha$ -Teilchen keine angeregten Niveaus besitzt, ist es plausibel, die Polarisation der  $\alpha$ -Teilchen zu vernachlässigen, d. h.  $\chi$  unabhängig von  $\mathfrak{R}$  anzunehmen. Die Berechnung von  $\chi_j$  kann dann für ein beliebiges  $|\mathfrak{R}|$  erfolgen, z. B. für  $R \rightarrow \infty$ . In diesem Falle zerfällt (24) in die SCHRÖDINGER-Gleichungen für die beiden  $\alpha$ -Teilchen. Eine Näherungslösung für diese gewinnen wir aus der Forderung, daß die kinetische Energie minimal ist bei festen Werten für den r.m.s.-Radius und das Normierungsintegral. Als EULERSCHES Gleichung des Variationsproblems:

$$\delta \int \varphi^* \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^4 \Delta_i + \left( \frac{\hbar^2 a^2}{2M} \right) \sum_{i=1}^4 (r_i - \mathfrak{R})^2 - E \right\} \varphi \, d\tau = 0 \quad (31)$$

erhalten wir dann die SCHRÖDINGER-Gleichung für das Schalenmodell, und für  $\varphi$  folgt:

$$\varphi = e^{i\mathfrak{R}\mathfrak{R}} \varphi_0 = \exp \left\{ +i\mathfrak{R}\mathfrak{R} - \alpha \sum_{i=1}^4 (r_i - \mathfrak{R})^2 \right\} g(1 \dots 4). \quad (32)$$

Darin ist  $g(1234)$  die Determinante aus den 4 Spin- und Ladungsspinfunktionen. Spalten wir noch die Schwerpunktsbewegung ab, so ergibt sich für  $\chi$ :

$$\chi = \exp \left\{ -\alpha \left[ \sum_{j=1}^4 (r_i - \mathfrak{R}_1)^2 + \sum_{i=5}^8 (r_i - \mathfrak{R}_2)^2 \right] \right\} \cdot g(1 \dots 4) g(5 \dots 8). \quad (33)$$

Die zweite Annahme bezieht sich auf die effektiven Zweikörperkräfte. Für diese wird der Ansatz

$$V(r_1 \dots r_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,k \neq i}^N V(r_i, r_k), \\ V(r_i, r_k) = -V_0 \exp\{-\beta(r_i - r_k)^2\} \cdot (W + M P_r + B P_s - H P_t) \quad (34)$$

zugrunde gelegt, wobei  $P_r, P_s, P_t$  die Austauschoperatoren für Ort, Spin und Ladung sind. Die Sättigung wird durch Fixierung des r.m.s.-Radius  $R_m$  erzwungen

$$R_m^2 = \frac{1}{4} \int \varphi^* \sum_{i=1}^4 (r_i - \mathfrak{R})^2 \varphi \, d\tau. \quad (35)$$

Mit diesen Annahmen und der Partialwellenzerlegung für  $F$

$$F(\mathfrak{R}) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{f_L(R)}{R} Y_L(\vartheta, \varphi) \quad (36)$$

geht (30) über in die Integro-Differentialgleichung:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{4M} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{\hbar^2}{4M} \frac{L(L+1)}{R^2} + V_d(R) - E \right\} f_L \\ = - \int_0^{\infty} dR' k_L(R, R') f_L(R'). \quad (37)$$

Damit ist die  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung auf ein Zweiteilchen-Streuproblem zurückgeführt, allerdings mit nicht-lokalem Potential. Die Integralkerne in den Gln. (37) lassen sich beseitigen, wenn  $f_L$  in der Umgebung von  $R=R'$  in eine TAYLOR-Reihe entwickelt wird. Mit den Abkürzungen

$$V_{nL} = \int_0^{\infty} k_L(R, R') \frac{(R'-R)^n}{n!} dR', \\ \Phi_L = \frac{\hbar^2}{4M} \frac{L(L+1)}{R^2} + V_d + V_{0L}, \quad (38) \\ D \cdot f_L = - \sum_{n=1}^{\infty} V_{nL} \frac{d^n}{dR^n} f_L(R)$$

erhalten wir dann die Gleichung:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{4M} \frac{d^2}{dR^2} + \Phi_L - E \right) f_L(R) = D \cdot f_L. \quad (39)$$

Die Auswertung zeigt nun, daß die Integralkerne  $k_L$  für verschiedene  $L$  wirklich verschieden sind. Unsere Annahme, die Potentiale drehimpulsabhängig anzusetzen, ist daher berechtigt. Wieweit es dagegen erlaubt ist, die Geschwindigkeitsabhängigkeit zu vernachlässigen, die im Operator  $D$  enthalten ist und außerdem in der Abhängigkeit der Kerne  $k_L$  und damit auch der Funktionen  $V_{nL}$  und  $\Phi_L$  von der Streuenergie  $E$  zum Ausdruck kommt, läßt sich schwer abschätzen: sie wird für hohe Energien stärker ins Gewicht fallen als für niedrige, da  $f_L$  für hohe Energien rascher oszilliert. Eine Berücksichtigung der Geschwindigkeitsabhängigkeit würde eine Einführung weiterer Parameter in das Streupotential erfordern, was, wie die Streurechnung zeigt, nicht nötig ist, da bereits eine gute Wiedergabe der experimentellen Daten möglich ist. Abgesehen davon ist eine Berücksichtigung von Gliedern mit  $n > 2$

problematisch, da sich dann die Ordnung der Differentialgleichung erhöht.

## 2.2 Verifikation des Ansatzes (4)

Betrachten wir die verschiedenen Summanden in (21), so erkennen wir, daß diese die Form

$$(\text{sgn } P_i) \cdot P_i \mathfrak{F} = [P_i F(R, \vartheta, \varphi)] \cdot I_i \quad (40)$$

mit

$$I_i = (\text{sgn } P_i) (P_i [\varphi_0(r_1 \dots r_4) \cdot \varphi_0(r_5 \dots r_8)])$$

haben. Die Permutationen  $P_i$  zerfallen nun in zwei Klassen: die erste enthält diejenigen  $P_i$ , die  $I_i$ , evtl. bis auf einen Zahlenfaktor, invariant lassen, die zweite enthält alle übrigen Permutationen der  $S_8$ . Die erste Klasse enthält alle Permutationen, die die Teilchen 1...4 untereinander und die Teilchen 5...8 untereinander vertauschen, ferner alle diejenigen, die die Teilchen 1...4 in Permutationen der Teilchen 5...8 überführen: Die Funktionen sind antisymmetrisch in den 4 Teilchen, daher sind die  $I_i$  in allen diesen Fällen gleich. Die Gesamtheit dieser Permutationen bilden, auf Grund ihrer Definition, eine Untergruppe der Gruppe  $S_8$  der Permutationen von 8 Dingen. Die übrigen Permutationen bringen jeweils mindestens ein Teilchen aus den Quadrupeln 1...4 und 5...8 als Argument in die Funktion  $\varphi_0$ . Wegen (20) ist dann aber  $\varphi_0 = 0$  \*. Daher ist

$$\Psi = \text{const} \cdot [F_{00}(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2) + F_{00}(\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1)] \\ \cdot \varphi_0(1 \dots 4) \varphi_0(5 \dots 8) \quad \text{für } |\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2| > 2L_0 \\ \cong \text{const} \cdot (e^{i\mathfrak{R}\mathfrak{R}} + e^{-i\mathfrak{R}\mathfrak{R}} + [f(\vartheta) + f(\pi - \vartheta)]) \\ \cdot \frac{e^{i\mathfrak{R}E}}{R} \varphi_0(1 \dots 4) \varphi_0(5 \dots 8). \quad (41)$$

Im Rahmen des primitiven  $\alpha$ -Teilchen-Modells wird nun angenommen, daß die Zerlegung (41) auch für  $R < 2L_0$  gültig ist. Das bedeutet aber, daß nicht alle Summanden des Antisymmetrisierungsoperators berücksichtigt werden, sondern nur diejenigen, gegenüber denen die Wellenfunktion für die innere Bewegung

$$\chi_j = \varphi_0(1 \dots 4) \varphi_0(5 \dots 8) \quad (42)$$

invariant ist.

In diesem Zusammenhang ist interessant, daß der Antisymmetrisierungsoperator  $A$  zerlegt werden kann

in Bereichen des Raumes von Null verschieden. Bei der Bildung des Betrag-Quadrates treten also keine zusätzlichen Interferenzglieder auf.

\* Genauer müßten wir sagen: Wenn  $\varphi_0(1234) \neq 0$ ,  $\varphi_0(5678) \neq 0$  und  $|\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2| > 2L_0$  sind, dann ist  $\varphi_0(1238) = 0$  usw.: Die durch Antisymmetrisierung aus einander hervorgehenden Glieder sind also in verschiede-



in ein Produkt aus zwei Antisymmetrisierungsoperatoren, von denen der erste die Antisymmetrisierung hinsichtlich einer beliebigen Untergruppe  $U$  der  $S_n$  ( $n=8$  in unserem Falle) und der zweite die Antisymmetrisierung hinsichtlich eines Repräsentantensystems  $N$  von Linksnebenklassen zu  $U$  bewirkt. Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich leicht einsehen. Jedes Element der endlichen Gruppe  $G$  kann nämlich eindeutig dargestellt werden als

$$P_G = P_N \cdot P_U. \quad (43)$$

Darin ist  $P_G$  ein Element von  $G$ ,  $P_U$  ein Element der Untergruppe  $U$  von  $G$ , und  $P_N$  ein Element eines festen zu  $U$  gehörenden Repräsentantensystems von Linksnebenklassen  $N$ . Durchlaufen  $P_N$  und  $P_U$  die Mengen  $N$  und  $U$ , so erhält man jedes Element von  $G$  genau einmal. Eine entsprechende Zerlegung gilt für  $\text{sgn}(P)$ :

$$\text{sgn } P_G = \text{sgn } P_N \cdot \text{sgn } P_U. \quad (44)$$

Daher folgt für  $A$ :

$$A = \sum_{P \in N} \sum_{Q \in U} (\text{sgn } P) (\text{sgn } Q) P \cdot Q = A_N \cdot A_U \quad (45)$$

$$\text{mit } A_N = \sum_{P \in N} (\text{sgn } P) P, \quad A_U = \sum_{P \in U} (\text{sgn } P) P.$$

Mit diesem Ergebnis können wir unsere früheren Überlegungen auf folgende Weise formulieren: Sei in (18)  $a=b=0$  und  $F_{00}$  eine gerade Funktion, dann können wir  $A$  durch  $A_N$  ersetzen. Vernachlässigen wir den Einfluß von  $A_N$ , so erhalten wir (41). Die von der Einheit abweichenden Glieder in  $A_N$  tragen zum Integralkern in (37) bei. Die Integralkerne und damit die Wirkung des Operators  $A_N$  treten daher nur für kleine Relativabstände  $R$  auf. Um die Auswirkung des PAULI-Prinzips auf  $\Psi$  zu untersuchen, kann man die Wirkung der  $A_U$  aus (45) betrachten, wobei  $U'$  eine beliebige Untergruppe der  $S_8$  ist.

Wir wollen nun zeigen, daß die Wellenfunktion für die Relativbewegung zweier  $\alpha$ -Teilchen für kleine Abstände die Entwicklung (4) erlaubt. Zum Beweis spalten wir von  $A$  gemäß (45) den Faktor

$$A_U = (1 - P_{15}) \cdot (1 - P_{26}) \cdot (1 - P_{37}) \cdot (1 - P_{48}) \quad (46)$$

ab und wenden diesen auf (41) an.  $P_{ik}$  ist darin der Operator, der die Teilchen  $i$  und  $k$  vertauscht. Tragen wir den Ansatz (33) ein und spalten von der geraden Funktion  $F$  den Faktor  $\exp(-\alpha R^2)$  ab

$$F = F' \cdot \exp(-\alpha R^2), \quad (47)$$

so erhalten wir, da  $A_U$  die Spinfunktion unverändert läßt,

$$A_U \cdot \Psi = \exp\{-\alpha[r_1^2 + \dots + r_8^2 - 8\mathfrak{E}^2]\} \cdot g(1 \dots 4) g(5 \dots 8) [A_U \cdot F'(\mathfrak{R})]. \quad (48)$$

Nichtverschwindende Glieder in der Potenzreihe enthalten daher mindestens Linearkoordinaten der Teilchen 1 oder 5, 2 oder 6, 3 oder 7, 4 oder 8. Wir drücken diese durch die Relativ- und inneren Koordinaten aus und beachten, daß  $F'$  nur von den Relativkoordinaten abhängt und daß sich die innere Bewegung im Grundzustand befindet. Daher ist das erste Glied in der Entwicklung von  $F'$  ein homogenes Polynom 4. Grades in den Relativ-Koordinaten. Drücken wir diese in sphärischen Polarkoordinaten aus, so folgt (4). Auf einen Beweis unter allgemeineren Voraussetzungen wollen wir hier nicht eingehen.

### 2.3 Berechnung der Compoundniveaus

Wir wollen nun noch kurz besprechen, welche Ergebnisse die Berechnung der Energiewerte der Compoundzustände liefert. Außer für ganz leichte Kerne gibt es hierfür bisher nur eine brauchbare Methode, das Schalenmodell in Verbindung mit dem RITZschen Variationsprinzip. Nimmt man für das Einteilchen-Potential das des harmonischen Oszillators:

$$V(r) = \sum_{i=0}^8 \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2M} r_i^2, \quad (49)$$

so erhält man für die Wellenfunktionen der  $(1s)^4(1p)^4$ -Konfiguration, die die niedrigsten Zustände des  $\text{Be}^8$  approximiert, nach Einführung der Relativ- und inneren Koordinaten

$$\Psi_L = A\{F_L \cdot \chi\}, \quad L=0, 2, 4 \quad (50)$$

mit  $F_L$  aus (5) und  $\chi$  aus (33). Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man die Schalenmodell-SCHRÖDINGER-Gleichung in den Koordinaten  $\mathfrak{R}$ ,  $q_1 \dots q_6$  separiert, für die innere Bewegung den Grundzustand annimmt und für die Relativbewegung die niedrigste, bei der Antisymmetrisierung nichtverschwindende Anregungsstufe wählt. Das ist die vierte, die je einen  $L=0, 2, 4$ -Zustand enthält.

Die Berechnung der Energie-Erwartungswerte mit diesen Funktionen, oder Annäherungsfunktionen zu anderen Einteilchenpotentialen,

$$E_L = \int \Psi^* H^{(8)} \Psi d\tau / \int \Psi^* \Psi d\tau \quad (51)$$

liefert für die Verhältnisse der Anregungsenergien<sup>30</sup>:

$$(E_4 - E_0)/(E_2 - E_0) = 10/3, \quad (52)$$

während die Anregungsenergien selbst vom Kernradius  $R_m$  und den Potentialkonstanten abhängen. Wählen wir für diese

$$\begin{aligned} V_0 &= 68,6 \text{ MeV}; & W &= M = 0,41; \\ B &= H = 0,09; & \beta &= 0,416 \text{ fm}^{-2}, \end{aligned} \quad (53)$$

so erhalten wir

| $R_m$   | $E_2 - E_0$ | $E_4 - E_0$ | (54) |
|---------|-------------|-------------|------|
| 1,97 fm | 3,73 MeV    | 12,4 MeV    |      |
| 2,22 fm | 3,42 MeV    | 11,4 MeV    |      |
| 2,42 fm | 3,15 MeV    | 10,5 MeV    |      |

Vergleichen wir diese Zahlenwerte mit den Daten des Niveauschemas<sup>31</sup> für  $\text{Be}^8$ , dem die Zahlenwerte (6) entnommen sind, so erkennen wir, daß wir an Stelle der experimentellen Werte für die Anregungsenergien auch die Schalenmodell-Werte hätten benutzen können. Zwar ist die Übereinstimmung zwischen den „theoretischen“ und den experimentellen Werten nicht vorzüglich, immerhin aber so gut, daß die Abweichungen durch die unvollkommene Kenntnis der Kernkräfte, insbesondere die Nichtberücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung und der Tensorkräfte erklärt werden können. Mit anderen Worten: Die in die Kräfte und in die Wellenfunktionen eingehenden Parameter können, innerhalb vernünftiger Grenzen, noch so variiert werden, daß eine genaue Übereinstimmung erzielt wird.

Das Niveauschema des  $\text{Be}^8$  basiert natürlich z. Tl. auf den Ergebnissen der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung, es gibt aber auch zahlreiche andere Experimente, die auf angeregte Niveaus des Kernes  $\text{Be}^8$  bei 2,9 und 10,5 MeV hinweisen. Zum Beispiel der  $\beta$ -Zerfall von  $\text{Li}^8$ <sup>31, 32</sup>. Damit unsere Darstellung konsistent ist, stellen wir uns auf den Standpunkt, daß die Anregungsenergien bereits aus anderen Reaktionen als der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung gewonnen wurden und daher neben den Streuphasen der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung zusätzliches Informationsmaterial darstellen, auf das wir uns bei der Interpretation der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung stützen dürfen.

Abschließend noch einige Worte zu den virtuellen Niveaus! Streng genommen sind alle Niveaus des  $\text{Be}^8$  Bestandteile des Streckenspektrums. Dies gilt

auch für den Grundzustand, der mit einer Lebensdauer von etwa  $10^{-15}$  sec in 2  $\alpha$ -Teilchen zerfällt. Infolge der breiten COULOMB-Barriere kann man hier noch in recht guter Näherung von einem gebundenen Zustand sprechen. Schwieriger wird die Lage bei den anderen Niveaus des  $\text{Be}^8$ . Da auch hier eine Potentialschwelle das Zerfließen des Wellenpaketes verhindert, ist es das beste, das Niveau zu definieren durch die Randbedingung einer negativen logarithmischen Ableitung am Kernrand, deren Zahlenwert ungefähr gleich dem des „fast gebundenen“  $L=0$ -Zustandes ist. Zahlenmäßig läuft die Behandlung, wie wir sie in Abschnitt 1 gegeben haben, auf dasselbe hinaus. Eine Diskussion der Problematik des Begriffes „virtuelles Niveau“ hat MA<sup>33</sup> an Hand des Deuteron-Singulettzustandes gegeben, für den ähnliche Verhältnisse vorliegen wie beim  $\text{Be}^8$ .

### 3. Diskussion der Ergebnisse

Wie wir bereits in Abschnitt 2 erwähnt haben, liefert das Schalenmodell für  $\text{Be}^8$  angeregte Niveaus bei 3 und 10 MeV. Dagegen haben wir in den Rechnungen Niveaus bei 2,9 und 10,5 MeV berücksichtigt. Diese Werte haben wir dem Niveauschema entnommen, das von AJZENBERG<sup>31</sup> auf Grund der experimentellen Daten aus zahlreichen Reaktionen mit  $\text{Be}^8$  als Compound- oder Restkern zusammengestellt wurde. Dieses Niveauschema darf nicht in allen Daten als völlig gesichert angesehen werden, da die Aussagen aus den verschiedenen Reaktionen z. Tl. einander widersprechen. Dieses gilt insbesondere von den Niveaus bei 4,2; 5,4; 7,5 MeV, denen INALL<sup>34</sup> auf Grund der  $\alpha$ - $\gamma$ -Korrelations-Experimente geraden Drehimpuls und gerade Parität zugeordnet hat. Allerdings waren die beobachteten Übergänge zu diesen Niveaus sehr schwach im Verhältnis zu denen in den Grundzustand und das 2,9 MeV-Niveau des  $\text{Be}^8$ . Eine weitere Stütze dieser Niveaus waren  $\text{Li}^7(\text{d}, \text{n})$ -Experimente<sup>35</sup>, in denen die Wirkungsquerschnitte maximal waren für Neutronenenergien, die diesen Anregungsenergien von  $\text{Be}^8$  entsprechen. Es handelt sich hier um Stripping-Reaktionen, deren Maxima in der Winkelverteilung nicht notwendig auf Compound-Zustände hinweisen. Ein weiterer Hinweis auf das Niveau bei 7,5 MeV aus den  $\alpha$ - $\alpha$ -

<sup>30</sup> E. FEENBERG u. E. WIGNER, Phys. Rev. **51**, 95 [1937]. — E. FEENBERG u. M. PHILLIPS, Phys. Rev. **51**, 597 [1937].

<sup>31</sup> F. AJZENBERG u. T. LAURITSEN, Rev. Mod. Phys. **27**, 77 [1955].

<sup>32</sup> W. F. HORNYAK u. T. LAURITSEN, Phys. Rev. **77**, 160 [1950].

<sup>33</sup> S. T. MA, Rev. Mod. Phys. **25**, 853 [1953].

<sup>34</sup> E. K. INALL u. A. J. F. BOYLE, Phil. Mag. **44**, 1081 [1953].

<sup>35</sup> H. T. RICHARDS, Phys. Rev. **59**, 796 [1941].

Streuexperimenten ist inzwischen hinfällig geworden<sup>9, 16</sup>.

In älteren Zusammenstellungen wurden die Anregungsenergien dieser 3 Niveaus z. Tl. etwas anders angegeben, und es lagen sogar Hinweise für ein Niveau negativer Parität vor bei 7,0 MeV<sup>36</sup>. Das Merkwürdige an diesen 3 Niveaus ist, daß sie schmal sind im Vergleich zu dem Niveau bei 2,9 MeV, daß sie andererseits aber infolge ihrer Zerfallsmöglichkeit in 2  $\alpha$ -Teilchen nur sehr wenig stabil sein können. Da zahlreiche andere, insbesondere neuere Experimente, z. Tl. trotz intensiven Suchens in diesen Energiebereichen, keine Hinweise auf Niveaus geben<sup>37-40</sup>, neigt man heute dazu, die fraglichen Niveaus Reaktionen zuzuschreiben mit Elementen, die in den untersuchten Substanzen in geringen Mengen als Verunreinigung etc. vorhanden waren. Eine an-

dere Erklärungsmöglichkeit für Niveaus in diesem Bereich besteht darin, daß die fraglichen Niveaus ungeraden Drehimpuls oder ungerade Parität haben. Daß die Zahlenwerte der verbleibenden Niveaus nicht genau mit denen des Schalenmodells übereinstimmen, läßt sich leicht mit zu starken Vereinfachungen in diesem Modell erklären. Neben der sicherlich falschen Wellenfunktion für  $\text{Be}^8$  nach dem Schalenmodell ist es vor allem der Ansatz für die Zweikörperkräfte, an dem die Kritik ansetzt. Hierin liegt der Grund, warum wir die Anregungsenergien lieber aus dem experimentellen Niveauschema entnommen haben.

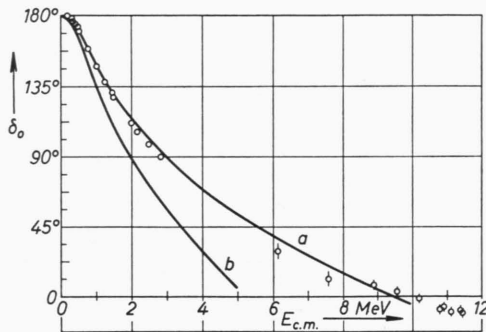


Abb. 6. Streuphasen nach dem HAEFERNschen Modellpotential  $a=3,49$  fm (Kurve a),  $5,08$  fm (b),  $L=0$ . Die Kreise sind experimentelle Daten nach<sup>13</sup>.

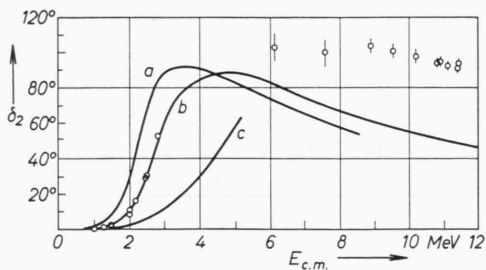


Abb. 7. Streuphasen nach dem HAEFERNschen Modellpotential  $a=5,08$  fm (Kurve a),  $4,60$  fm (b),  $4,44$  fm (c),  $L=2$ . Die Kreise sind experimentelle Daten nach<sup>13</sup>.

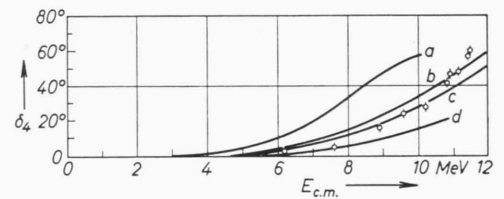


Abb. 8. Streuphasen nach dem HAEFERNschen Modellpotential  $a=5,08$  fm (Kurve a),  $4,60$  fm (b),  $4,44$  fm (c),  $4,13$  fm (d). Die Kreise sind experimentelle Daten nach<sup>13</sup>.

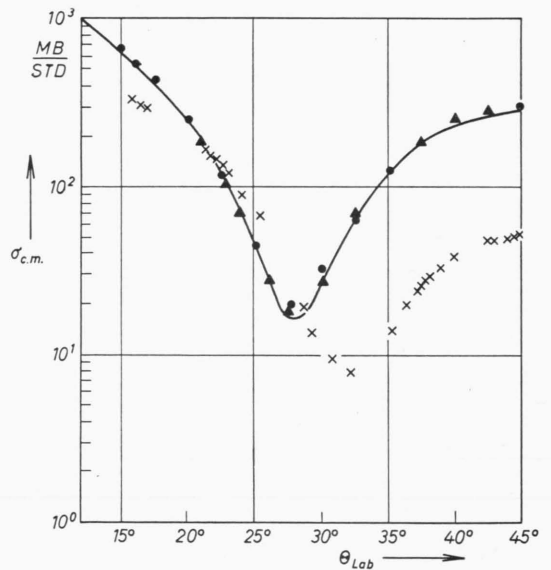


Abb. 9. Differenzieller Wirkungsquerschnitt der  $\alpha$ - $\alpha$ -Streuung für  $E_{\text{cm}}=7,6$  MeV<sup>13</sup>; die Kreuze unterhalb der Kurve sind Meßpunkte für  $E_{\text{cm}}=7,43$  MeV von STEIGERT<sup>16</sup>.

<sup>36</sup> F. AJZENBERG u. T. LAURITSEN, Rev. Mod. Phys. **24**, 321 [1952].

<sup>37</sup> V. MEYER u. H. H. STAUB, Helv. Phys. Acta **31**, 205 [1958].

<sup>38</sup> R. E. HOLLAND, D. R. INGLIS, R. M. MALM u. F. P. MOORING, Phys. Rev. **99**, 92 [1955].

<sup>39</sup> E. C. LAVIER, S. S. HANNA u. R. M. GELMAS, Phys. Rev. **103**, 143 [1956].

<sup>40</sup> C. C. TRAIL u. C. H. JOHNSON, Phys. Rev. **95**, 1363 [1954].

Die Verbesserungen unseres Potentialmodells gegenüber dem von HAEFNER<sup>17</sup> lassen sich an Hand der Abb. 3 bis 8 ansehen. Betrachten wir zunächst die Kurven für  $L=0$ ! In diesem Falle unterscheiden sich beide Modelle wenig voneinander. Nur bei den höchsten Energien ist eine geringe Verbesserung merkbar. Bei  $L=2$  dagegen läßt sich nach dem HAEFNER-Modell für keinen Wert des Kernradius eine Kurve angeben, die sowohl bei großen als auch bei kleinen Energien Übereinstimmung mit den experimentellen Werten der Streuphasen zeigt; der relativ beste „fit“ würde einen größeren Wert des Wechselwirkungsradius erfordern als  $L=0$ . Bei  $L=4$  ist diese Tendenz noch stärker ausgeprägt. Es wurde (Abb. 8) die Kurve für den Wechselwirkungsradius  $a=3,5$  fm gar nicht mehr angegeben. In unserem Modell dagegen liefert die Wahl  $a=3,5$  fm eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten für alle drei Drehimpulse. Daß wir nicht bei allen Energiewerten vorzügliche Übereinstimmung mit den experimentellen Werten erhalten, dürfte z. Tl. an zu großen Vereinfachungen in unserem Modell, z. Tl. aber auch an den Ungenauigkeiten der experimentellen Winkelverteilungen und der Bestimmung der Streuphasen liegen. Insbesondere gilt dies für die Bestimmung der Streuphasen bei  $E=6,15$  und  $7,6$  MeV, wie ein Blick auf die Abb. 9 zeigt,

die der Arbeit von NILSON u. Mitarb.<sup>13</sup> entnommen wurde, und in der die Winkelverteilung für  $E_{\text{cm}}=E_{\text{lab}}/2=7,6$  MeV wiedergegeben wird. Für  $\vartheta_{\text{lab}}$  zwischen  $28^\circ$  und  $32^\circ$  sowie bei  $40^\circ$  weicht die berechnete Kurve für  $d\sigma/d\Omega$  von den Meßwerten ab. Die Bestimmung der Streuphasen ist daher ungenau, was in der Fehlerangabe der Meßpunkte in Abb. 6 bis 8 zum Ausdruck kommt. Die Kreuze in Abb. 9 sind Meßpunkte von STEIGERT<sup>16</sup> und haben in diesem Zusammenhang keine Bedeutung. Für  $L=2$  fällt insbesondere der steile Abfall der Streuphase nach dem HAEFNER-Modell bei großen Energien auf (Abb. 7), der ein deutliches Zeichen dafür ist, daß für kleine Werte der Relativ-Koordinate das Potential zu stark repulsiv ist.

Zu den Grenzen dieses Modells ist folgendes zu sagen: Sollte eines Tages die Berücksichtigung der Streuphasen zum Drehimpuls  $L=6$  erforderlich sein, so muß im Zusammenhang damit die Frage der höherangeregten Niveaus des  $\text{Be}^8$  untersucht werden, insbesondere müssen im Rahmen des Schalenmodells höhere Anregungsstufen berücksichtigt werden, da in der p-Schale überhaupt kein Niveau mit  $L=6$  vorkommt.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. F. BOPP, Herrn Prof. Dr. F. BECK und Herrn Prof. Dr. K. WILDERMUTH für zahlreiche Diskussionen und Anregungen.